Usage des échiquiers arithmétiques de Delannoy dans la résolution de problèmes combinatoires et applications actuelles

Sylviane R. Schwer

Usage des échiquiers arithmétiques de Delannoy dans la résolution de problèmes combinatoires et applications actuelles

Sylviane R. Schwer
Université Paris 13-Sorbonne Paris Cité, LIPN CNRS UMR7030

Le 18 mai 1891, Charles-Ange Laisant écrit [1] à Edouard Lucas pour lui faire part de sa volonté d'introduire au vocabulaire de la *Grande Encyclopédie* le terme mathématique *Echiquier*. Laisant compte sur Lucas et surtout son ami Delannoy pour en rédiger le contenu principal [2] :

> On donne le nom d'échiquiers arithmétiques à des tableaux numériques, habituellement de forme carrée ou rectangulaire, présentant des cases analogues à celles d'un papier quadrillé. Dans chacune de ces cases est inscrit un nombre qui se forme d'après une loi déterminée. M. Ed. Lucas a montré le premier toute l'utilité de l'échiquier dans un grand nombre de recherches arithmétiques, soit pour simplifier les démonstrations de théorèmes connus, soit

1. Sylviane Schwer et Jean-Michel Autebert, « Henri-Auguste Delannoy, une biographie », *Math. Sci. Hum. Math. Soc. Sci* 174 (2006), p. 25–67, correspondance passive de Delannoy, p. 36-37.

2. Charles-Ange Laisant, « Echiquier (Mathématiques) », *in* La Grande Encyclopédie, inventaire raisonné des sciences, des lettres et des arts 15 (1891-1902), p. 317.

> pour en découvrir de nouveaux, soit pour résoudre certains problèmes ; il y a lieu surtout de citer sa théorie des permutations figurées. Plus tard, M. Delannoy imagina de faire varier la forme de l'échiquier ; par la considération d'échiquiers triangulaires, pentagonaux, hexagonaux, il parvint à résoudre simplement des problèmes difficiles, et notamment des questions de probabilités. ...

Dans ce chapitre, nous nous interesserons dans un premier temps à l'histoire des échiquiers arithmétiques, leur construction, étude et utilisations dans la tradition française, en suivant le point de vue de la communauté combinatoire de la fin du XIXe siècle, puis nous honorerons notre vielle promesse [3] en présentant les différents échiquiers étudiés par Henri Delannoy et ses applications à quelques problèmes de probabilité discrètes. Nous terminerons en montrant quelques applications actuelles, notamment en illustrant la théorie des temps verbaux du grammairien Marc Wilmet.

C'est en 1883, au congrès de Rouen de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences (AFAS), qu'Edouard Lucas se propose, dans une communication [4] intitulée « sur l'arithmétique figurative » de montrer *l'emploi de l'échiquier dans un grand nombre de recherches arithmétique.* Dans cette communication, l'échiquier est utilisé avec des jetons pour résoudre des problèmes de permutations(Figure 1), de façon visuelle, d'où le terme de *permutations figurées.* L'adjectif fait écho à l'usage des nombres figurés depuis Diophante jusqu'au XVIIe siècle pour résoudre certains problèmes arithmétiques comme la somme des n premiers nombres impairs valant n^2 (Figure 2).

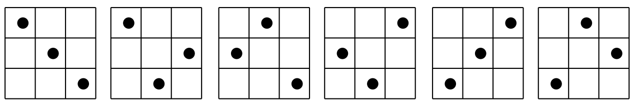


FIGURE 1 – Les Permutations figurées sur trois éléments

Les échiquiers ou tableaux arithmétiques les plus connus [5] sont

3. SCHWER et AUTEBERT, *op. cit.*
4. Edouard LUCAS, « Sur l'arithmétique figurative. Les permutations. », *Comptes rendus du Congrès annuel de l'AFAS, Rouen* 12 (1883), p. 83–97.
5. Édouard LUCAS, *Théorie des nombres*, Paris : Gauthier-Villars et fils, 1891.

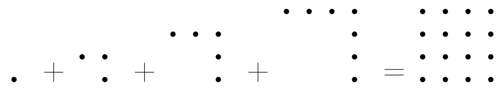


FIGURE 2 – nombres figurés : $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7		1	**2**	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21			1	3	**6**	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35				1	4	10	**20**	35	56	84	120
1	5	15	35					1	5	15	35	**70**	126	210	330
1	6	21						1	6	21	56	126	**252**	462	792
1	7							1	7	28	84	210	462	**924**	1716
1								1	8	36	120	330	792	1716	**3432**

TABLE 1 – triangle arithmétique de Pascal et le carré arithmétique de Fermat

le carré de Fermat (1636) et le triangle de Pascal (Table 1)[6].

Les études sur les nombres polygones de Diophante[7] ont déjà produit des tableaux arithmétiques. Signalons par exemple celui de Nicomaque de Gérase (Ier siècle EC). Les nombres polygones – qui remonteraient à Pythagore - sont associés à des suites arithmétiques. plus précisément, pour $r \geq 1$, le *nième* nombre $r + 2$-gone est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de raison r et de premier terme 1. Ils peuvent se représenter géométriquement par des $r + 2$ polygones réguliers. Figure 2 représente figurativement le quatrième nombre 4-gone ou carré. Dans son Introduction arithmétique, Nicomade produit le tableau (2) et observe que tout nombre polygonal est égal au nombre polygonal situé immédiatement au-dessus de lui, augmenté du nombre triangulaire de la colonne précédente.

Le tableau arithmétique de Fermat (Figure 3) est construit à partir d'une nouvelle séquence de nombres polygones, plus connus sous le nom de théorie des nombres figurés. Chaque nouvelle sé-

6. Ou de Tartaglia (1500-1577), ou Stifel (1486-1567), que l'on trouve aussi dans des manuscrits chinois du XIII^{e} siècle et chez le mathématicien philosophe et poête arabe Omar Khayyàm (1050-1130).

7. traduction Georges MASSOUTIÉ, *le traité des nombres polygones de Diophante d'Alexandrie. traduction française, avec introduction*, `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k134428z`, Macon : PROTAT frères, 1911.

Triangle	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Carrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagones	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagones	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagones	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

Table 2 – nombres polygones

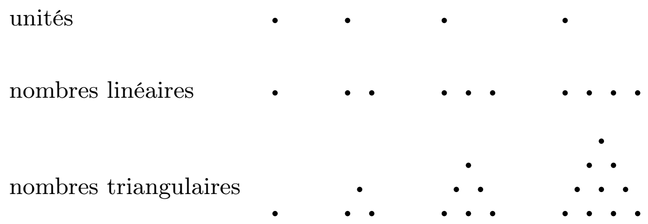


Figure 3 – construction des nombres figurés

rie de nombres figurés est construite en utilisant comme bases les nombres de la série précédente surplombées du nombre précédent de la série [8], et qui satisfont donc la loi suivante :

Nombres figurés de rang k et d'ordre n : $P_1^k = 1$, $P_n^k = P_n^{k_1} + P_{n-1}^k$.

Après la série des nombres triangulaires viennent celle des pyramidaux triangulaires ou tétraèdriques puis celle des hexaédriques. Pascal les nomme ordres numériques [9].

Pascal étudiera ces tableaux de deux points de vue différents. Le premier, académique, dans un traité écrit en latin [10] pour les érudits. Il y étudie les différentes lois de formation existantes entre les cellules, avec leurs rapports aux nombres des ordres numériques (les nombres figurés) et aux coefficients du développement des puissances du biôme qui justifient l'existence de ce triangle. Il termine par la résolution du problème suivant, unique problème du traité, qu'il résout et donne la propriété 1.

8. On peut également obtenir ces nombres en empilant toutes les figures des nombres du rang précédant, d'ordre n à 1.

9. Blaise Pascal, *Triangulus arithmeticus*, 1653-4.

10. *Ibid.*

problème 1 *trouver la valeur d'une cellule quelconque du triangle*[11]

propriété 1
La valeur d'une cellule de rang k et d'ordre n vaut $\binom{n+k}{k}$

Le second[12] point de vue est applicatif, et donc rédigé en langage vernaculaire. Ce traité, postérieur au premier, s'adresse aux passionnés du jeu, comme le chevalier de Méré qui lui a posé le problème du *parti des parties.* Il s'agit de déterminer la répartition des mises dans le cas d'une partie interrompue, de telle manière que la part revenant à chaque joueur soit proportionnelle aux chances qui lui reste de gagner la partie.

Ce type de problème se rencontre déjà en Italie au XV^{ème} et XVI^{ème} siècle comme chez Luca Pacioli[13] sous la forme :

problème 2 *Un tournoi se fait en 60 points, une partie gagnée donne 10 points. La mise est de 10 ducats. Mais le tournoi doit être interrompu avant la fin. A ce moment, l'un des protagonistes a 50 points et l'autre 20. On demande comment faire la répartition équitable.*

Luca Pacioli (1445–1510), Cardan(1501-1576), Tartaglia (1499-1557) en ont proposé des solutions non exactes. Pascal va utiliser une nouvelle méthode de raisonnement, fondée sur l'utilisation du triangle arithmétique et obtenir la réponse correcte. Dans la section *usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties*, quatre problèmes-propositions sont posés qui demandent explicitement d'utiliser le triangle arithmétique pour la résolution comme le numéro I repris ici :

problème 3 *Etant proposés deux joueurs P et N, auxquels il manque respectivement p et n parties pour achever, trouver par le Triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.*

11. Valeur déjà calculée par Fermat.
12. Blaise Pascal, *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*, G. Desprez, 1665.
13. Luca Pacioli, *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita : Tractatus Geometrie.* traduction anglaise de l'extrait sur `http://www.terravista.pt/MeiaPraia/5079/dasumma.`, 1494.

Ainsi, Edouard Lucas invoque-t-il Pascal pour justifier – contre le monde académique qui méprise cette approche comme relevant des mathématiques plus plus curieuses que sérieuses, quoique utiles [14] [15] - l'étude généralisée des échiquiers arithmétiques, dans son ouvrage de théorie des nombres [16] qu'

> *En beaucoup d'endroits, nous avons employé dans nos raisonnements le mode de calcul sur l'échiquier, à l'imitation de Pascal, dans son fameux traité sur le triangle arithmétique. Pour montrer la supériorité de ce procédé général d'arithmétique de position, nous avons donné, dans le Chapitre sur le* Calcul des probabilités, *les solutions si ingénieuses de M. Delannoy, au sujet du* Scrutin de ballottage *et de la* Durée du Jeu. *Cette méthode donne, quant à présent, l'unique solution d'une question difficile posée par Laplace, tandis ques le résultats présentés récemment à l'*Académie des Sciences *ont une forme illusoire.*

Dans son article de 1883, le premier problème traité par Lucas est celui des n tours sur un échiquier carré de n^2 cases qui généralise le jeu des échecs, et figure géométriquement le problème des permutations. Les autres problèmes sont des problèmes dérivés suivant diverses contraintes de symétrie ou d'interdiction de certaines configurations comme se trouver sur une diagonale. La demande est toujours la même, compter le nombre de configurations possibles en utilisant un codage cartésien des centres des cases. (1,1) [17] dénote la case du coin inférieur gauche, (n,n) celle du coin supérieur droit. Ce codage permet de traduire les contraintes de l'*analysis situ* en contraintes numériques. Par exemple, Lucas énonce le théorème suivant :

Th. – *Dans toute permutation figurée, le nombre des jetons situés sur les cases blanches est toujours pair.*

Lucas annonce également qu'il espère

> *donner ultérieurement l'application de cette méthode à la théorie des progressions arithmétiques et géométriques, des résidus et des formes quadratiques, de l'analyse indéterminée du seconde degré des fonctions numériques périodiques, etc.*

14. Anne-Marie Décaillot, « Géométrie des tissus. mosaïques. echiquiers. Mathématiques curieuses et utiles. », *Revue d'histoire des mathématiques* 8 (2002), p. 145–206.

15. Voir aussi Catherine Goldstein dans ce volume.

16. Lucas, *op. cit.*

17. Tous les exemples d'utilisation d'échiquier arithmétique code (1,1) le coin supérieur gauche !

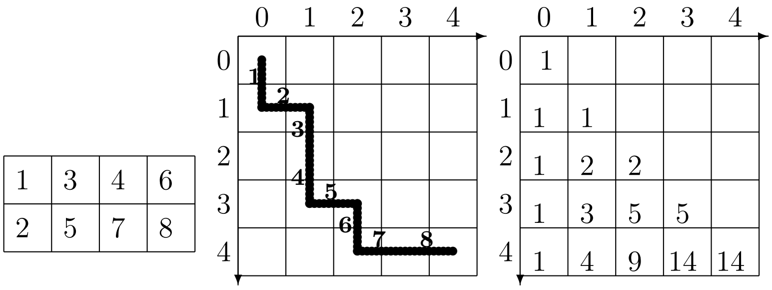


FIGURE 4 – les deux files de soldats sur l'échiquier carré 5×5

Une vingtaine d'année auparavant, Lucas appliquait des résultats de l'arithmétique à des figures sur damier, dans le cadre de ses travaux sur le tissage [18]. Dans tous les cas, il s'agit de monstrations mathématiques, pour rendre les mathématiques plus vivantes et attractives, accessibles à un large public, objectif commun avec celui de l'AFAS, fondé en 1872 par un groupe de scientifiques de renom comme Louis Pasteur, Claude Bernard, Marcelin Berthelot ou Adolphe Wurtz, pour le relèvement scientifique de la France, après la catastrophe de 1870. C'est donc naturellement que le cycle des échiquiers arithmétiques s'expose aux différents congrès de l'AFAS. Les communications suivantes sont dues à Henri Delannoy, militaire de carière, et bras droit de Lucas depuis son retour aux mathématiques [19] [20]. En 1886, alors qu'il est sous-intendant militaire à Orléans, il se propose de [21] donner un nouvel exemple de l'emploi de l'échiquier, en l'appliquant à la résolution

problème 4 *De combien de manière peut-on disposer 2n nombres sur 2 rangées de n nombres, de telle sorte que les nombres croissent toujours de gauche à droite et de haut en bas ?*

Pour répondre au problème posé, il faut déposer les nombres les uns à la suite des autres en ordre croissant dans un tableau de deux rangées de n colonnes en commençant par placer 1 dans la rangée

18. Décaillot, *op. cit.*
19. Schwer et Autebert, *op. cit.*
20. Jean-Michel Autebert, Anne-Marie Décaillot et Sylviane Schwer, « Henri-Auguste Delannoy et la publication des oeuvres posthumes d'Edouard Lucas », *Gaz. Math., SMF* 95 (2003), p. 50–62.
21. Henri Delannoy, « Emploi de l'échiquier pour la résolution de problèmes arithmétiques. », *Comptes rendus du Congrès annuel de l'AFAS, Nancy* 15 (1886), p. 183–188.

supérieure et le plus à gauche, puis les autres soit à la place libre la plus à gauche du rang supérieur, soit à la place libre la plus à gauche du rang inférieur, mais dans ce cas, uniquement si la place au-dessus est déjà occupée. Ce problème, décrit par Lucas [22] sous le nom *de Problème des deux files de soldats*, a fait l'objet d'une correspondance fournie entre Delannoy et Gaston Tarry [23] alors contrôleur des contributions à Alger, entre 1885 et 1886. En mars 1885, Tarry demande à Delannoy des précisions sur sa démonstration à l'aide de l'échiquier et en février 1886, il écrit

> *La méthode des triangles arithmétiques est tellement intuitive que nous avons trouvé tous deux un triangle pour la question.*

Mais Delannoy attribue dans sa communication, l'idée d'utiliser l'échiquier pour la résolution du problème à Tarry.

Il s'agit donc pour ces messieurs de montrer que toute solution est équivalente à un chemin minimal parcouru par la tour par pas de 1 et réciproquement, comme le montre la Figure 4. Etablir ce genre de correspondance est l'essence de la *combinatoire énumérative*.

Un chemin minimal entre les cases (0,0) et (4,4) comportent 4 pas $\rightarrow$ et 4 pas $\downarrow$. Etiquetons le ième pas du déplacement de la Tour par le nombre i. Si ce nombre est sur la rangée du haut, choisissons un pas $\downarrow$, sinon un pas $\rightarrow$. la contrainte de remplissage dit qu'au cours du déplacement de la Tour, le nombre de pas $\rightarrow$ ne peut jamais excéder le nombre de pas $\downarrow$. Le problème posé revient donc à trouver *le nombre de manières dont une tour peut se rendre en un minimum de pas d'une extrémité à celle diamétralement opposée d'un échiquier carré de taille n sans traverser la diagonale reliant ces deux extrémités.* Dans sa lettre du 9 avril 1886, Tarry écrit :

> *En démontrant ainsi votre lemme, non seulement vous trouvez une démonstration bien supérieure à la mienne (car vous évitez la considération des formules) mais encore vous trouvez la formule remarquable suivante*

$$T(x,y) = \binom{x+y}{x} - \binom{x+y}{x+1} \tag{1}$$

22. Lucas, *op. cit.*, Exemple III, p. 86.

23. Delannoy et Tarry correspondront jusqu'en 1894, sur divers problèmes concernant les échiquiers, les labyrinthes (cf. communication d'Evelyne Barbin), et de nombreuses récréations mathématiques, et ils se retrouvent aussi régulièrement à Paris où ils ont chacun un pied-à-terre et lors des congrès de l'AFAS. Toute la correspondance citée provient de la Société d'Histoire Naturelle et d'Archéologie de la Creuse, qui nous l'a aimablement mise à disposition.

.

En fait, pour ce problème, une solution figurative à l'aide d'une représentation géométrique sous la forme d'un chemin le long d'un quadrillage du plan avait déjà été donnée en 1878 par Whitworth [24] pour permettre la résolution de plusieurs problèmes parus dans l'*Educational Times* portant sur des arrangements entre des objets de deux types différents avec une contrainte de priorité : les objets d'un des types doit être constamment excédentaire sur les objets de l'autre type, tout le long du processus de placement. En voici trois exemples.

problème 5 *Un homme boit dans un ordre quelconque n verres de vin et n verres d'eau également remplis. Quelle chance a t-on de parier à n contre 1 qu'il ne boive jamais plus de vin que d'eau tout au long du processus.(Ed. Times, juin 1878, question 5669).*

problème 6 *De combien de façons peut-on ordonner m unités positives et n unités négatives de telle sorte que que toutes les sommes partielles de 1 à $n+m$ termes ne soient jamais négatives ?*

problème 7 *De combien de façons un homme peut-il gagner m jeux et en perdre n, de telle sorte qu'à aucun moment il n'aura perdu plus qu'il n'aura gagné ?*

La résolution figurée de ces problèmes est identique au problème 7, donnée figure 4, il s'agit d'étiqueter les $\downarrow$ par les objets excédentaires et les $\rightarrow$ par les objets déficitaires, en suivant l'ordre de placement.

L'instance la plus célèbre de ce type de problème est *le problème du scrutin*, proposé par Bertrand en 1887 [25].

problème 8 *On suppose que deux candidats A et B soient soumis à un scrutin de ballotage. Le nombre des votants est μ. A obtient*

24. W. Allen Whitworth, « Arrangements of m things of one sort and n things of another sort, under certain conditions of priority », *Messenger* VII (2) (1878), p. 105–114.
25. Joseph Bertrand, « Probabilité. Solution d'un problème. », *C. R. de l'Acad. Sci. Paris* 105 (1887), p. 369.

m suffrages et est élu, B en obtient $\mu - m$. On demande la probabilité[26] *pour que, pendant le dépouillement du scrutin, le nombre des voix de A ne cesse pas une seule fois de surpasser celles de son concurrent.*

D'après Feller[27] et Barton et Mallows[28], le problème aurait été posé et résolu par Whitworth en 1878[29]. Cette assertion est vraie si l'on dit « type de problème » car ni dans l'article ni dans son livre *Choice and Chance*, ne figure un problème portant sur un scrutin. Le problème 6 est redécouvert en 1946[30]. Il semble que cette publication ait été entièrement ignorée sur le continent avant les années 1960.

Dans sa communication, Bertrand exprime l'opinion qu'un résultat aussi simple $\frac{2m-\mu}{\mu}$ pourrait se démontrer d'une manière plus directe que par récurrence à partir de la loi $P_{m+1,\mu+1} = P_{m,\mu+1} + P_{m+1,\mu}$, $P_{m,\mu}$ désignant le nombre de combinaisons favorables dans le dépouillement du scrutin. Désiré André[31] propose une solution fondée sur une version de la méthode des images de Kelvin dans un milieu discret énumérable[32], connue dans sa version combinatoire sous le nom de *principe de réflexion d'André*[33]. Il s'agit d'établir une bijection entre l'ensemble des dépouillements défavorables commençant par A et l'ensemble des dépouillements – tous défavorables – commençant par B. La probabilité de ce dernier ensemble étant de $\frac{q}{(p+q)}$, la probabilité recherchée est donc de $1 - 2\frac{q}{(p+q)} = \frac{p-q}{p+q}$. La difficulté et la longueur du calcul réside dans l'établissement de la correspondance. Cette preuve est reprise dans tous les traités classiques de probabilité[34].

26. Rappelons que dans ce cas, la probabilité est le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas total.
27. William FELLER, *An introduction to probability theory and its applications, vol1.* John Wiley, 1968, p. 69.
28. Barton D. E. et C. L. MALLOWS, « Some aspects of the random sequence,. », *Ann. Math. Statist.* 36 (1965), p. 236–260.
29. WHITWORTH, *op. cit.*
30. Paul ERDÖS et Irving KAPLANSKY, « Sequences of plus and minus. », *Scripta Math.* 12 (1946), p. 73–75.
31. Désiré ANDRÉ, « Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. », *C. R. de l'Acad. Sci. Paris* 105 (1887), p. 436–437.
32. FELLER, *loc. cit.*, p. 69.
33. Louis COMTET, *Analyse combinatoire, Tomes I, II*, Paris : PUF, 1970.
34. Henri POINCARÉ, *Calcul des Probabilités*, Paris : Gauthier-Villars, 1912 ;

Aucun de ces auteurs ne mentionnent d'autres solutions, en particulier celle de Delannoy, qui illustre l'usage de l'échiquier triangulaire [35] et que reprend Lucas dans son ouvrage [36], comme illustration de la puissance du calcul par les échiquiers et qui sera ensuite repris par les combinatoriciens modernes [37] .

L'originalité et l'intérêt des travaux de Delannoy sur les échiquiers résident dans l'utilisation du fait que les échiquiers arithmétiques possèdent une structure algébrique fondée sur la linéarité de la loi de formation, qui est analogue aux lois des suites récurrentes linéaires comme par exemple les suites de la famille de la suite de Fibonacci de loi linéaire$f(n) = f(n-2) + f(n-1)$. Les deux lois qui retiennent l'attention de la communauté combinatoire de l'époque sont celles correspondant aux parcours de la

$$Tour : \tau(n, m) = \tau(n-1, m) + \tau(n, m-1) \qquad (2)$$

$$Reine : \rho(n, m) = \rho(n-1, m) + \rho(n, m-1) + \rho(n-1, m-1) \quad (3)$$

Les échiquiers arithmétiques deviennent ainsi des objets mathématiques à part entière satisfaisant la

propriété 2 *Si plusieurs échiquiers ont la même loi de formation linéaire, il en est de même pour l'échiquier obtenu en superposant les échiquiers donnés, après avoir multiplié tous les termes d'un même échiquier, par un nombre quelconque, positif ou négatif.*

Ces parcours induisent pour les échiquiers carré les conditions initiales $Q\rho(n, 0) = Q\rho(0, m) = Q\tau(n, 0) = Q\tau(0, m) = 1$.

Dans le cas de la Tour, on retrouve le carré de Fermat (Table 1) et les valeurs établies en (1). La série $(Q\tau(n, n))_{(n)}$ est très familière aux combinatoriciens. C'est la séquence `EIS A000984` [38] des *coefficients centraux binomiaux*. on trouve cette suite assocée

Emile Borel, *Eléments de la théorie des probabilités.* Paris : Albin Michel, 1950, *entre autres.*

35. Henri Delannoy, « Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilité. », *Comptes rendus du Congrès annuel de l'AFAS, Paris* 18 (1889), p. 43–52.

36. Lucas, *op. cit.*

37. Comtet, *op. cit.* ; Richard Stanley, *Enumerative combinatorics II.* Cambridge : Cambridge Universiry Press, 1999.

38. Neil Sloane, éd., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, http ://www.research.att.com/ njas/sequences/.

aux noms d'Euler, Segner, Delannoy, Dyck et Catalan. Stanley[39] a référencé 66 familles d'objets dénombrés par cette série.

Dans le cas de la Reine, c'est le tableau de Delannoy, représenté conformément au repérage cartésien Table 3. Il a été redécouvert et réétudié à partir de 1963[40].

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	**3**	5	7	9	11	13	15	17
2	1	5	**13**	25	41	61	85	113	145
3	1	7	25	**63**	129	231	377	575	833
4	1	9	41	129	**321**	681	1289	2241	3649
5	1	11	61	231	681	**1683**	3653	7183	13073
6	1	13	85	377	1289	3653	**8989**	19825	40081
7	1	15	113	575	2241	7183	19825	**48639**	108545
8	1	17	145	833	3649	13073	40081	108545	**265729**

Table 3 – Echiquier Carré de Delannoy (marche de la reine) : $Q\rho(n,p) = Q\rho(n-1,p) + Q\rho(n,p-1) + Q\rho(n-1,p-1)$

Dans ce tableau, les nombres en gras sont connus comme la suite `A001850`[41] des nombres de Delannoy centraux qui apparaissent dans de nombreuses applications : propriétés des treillis et des posets, combinatoires des mots, au côté des mots de Dyck et Schröder[42]. Robert Sulanke[43] a donné une trentaine de configurations dénombrées par les nombres de Delannoy centraux. C'est Laisant qui a suggéré à Delannoy de travailler sur ce cas. On retrouve dans la correpondance passive de Delannoy plusieurs échanges sur ces échiquiers avec Charles-Henri Laisant[44],Gaston Tarry, Eugène

39. Stanley, *op. cit.*, exercice 6.19 p.219–229.

40. L. Moser et W Zayachkowski, « Lattice Paths with diagonal steps. », *Scripta Math.* 26 (1963), p. 223–229 ; R. Stanton et D. Cowan, « LNote on a square functional equation. », *Siam review.* 12 (1970), p. 277–279.

41. Sloane, *op. cit.*

42. Cyril Banderier et Sylviane Schwer, « Why Delannoy Numbers ? », *J. Statist. Plann. Inference* 135 (1) (2005), p. 40–54.

43. Robert A. Sulanke, « Objects counted by the central Delannoy numbers », *Journal of Integer Sequences* 6 (2003).

44. Laisant est décidément en avance sur son temps, car c'est lui qui suggère

Catalan, entre autres. La réponse au problème 1, dans ce cas est un peu moins immédiate. Un chemin entre (0,0) et (n,m) possédant d pas diagonaux, n'a que $n-d$ pas horizontaux et $m-d$ pas verticaux. Pour $n \leq monadonc$ [45]

$$Q\rho(n,p) = \sum_{d=0}^{n} \frac{(n+m-d)!}{(n-z)!(m-z)!z!} = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d}\binom{n+m-d}{n} \tag{4}$$

ou bien en partitionnant les parcours selon le nombre d de $\downarrow_{\rightarrow}$,

$$Q\rho(n,p) = \sum_{d=0}^{n} 2^d \binom{m}{d}\binom{n}{d} \tag{5}$$

Mais Delannoy, n'avouait pas d'applications importantes concernant ce cas [46]. il propose

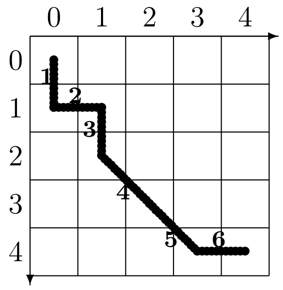
problème 9 *Deux joueurs d'échecs marquent, au fur et à mesure, les parties qu'ils gagnent et, de plus, à chaque partie nulle, chacun d'eux marque une partie gagnée et une partie perdue. Après avoir ainsi marqué chacun 2n parties, ils se trouvent n'avoir ni gagné, ni perdu. On demande la probabilité qu'ils auront joué 2n parties effectives , c'est-à-dire qu'il n'y aura pas eu de partie nulle.*

Chaque joueur correspond à une dimension. le début du jeu correspond à l'origine (0,0). Chaque partie gagnée correspond à un pas de 1 dans la direction correspondant au gagnant, chaque partie neutre correspond à un pas en diagonal (Figure 5). Ces parcours sont également connus sous le nom de chemins de *Motzkin*. La réponse est donc $\dfrac{Q\tau(n,n)}{Q\rho(n,n)}$.

à Delannoy détudier les marches de la Reine, qui a fait le succès actuel de Delannoy, mais c'est aussi lui, à notre connaissance, qui fait apparaitre pour la première fois (en 1879) la suite de Thue-Morse dans la recherche du signe du nième terme dans le développement du produit $\Pi_i(1-a_i)$, en représentant ce problème par une mosaïque générée récursivement, voir pour plus de détail Décaillot, *op. cit.*, p.182 ou Jérôme Auvinet dans cet ouvrage, à qui nous avions signalé ce fait lors de la soutenance de sa thèse en 2011.

45. L'expression est symétrique en n et m, donc dans le cas contraire, il faut permuter les termes.

46. Delannoy, *op. cit.* ; Henri Delannoy, « Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilité. », *Comptes rendus du Congrès annuel de l'AFAS, Bordeaux* 24 (1895), p. 70–90.



partie	1	2	3	4	5	6
J1	1	0	1	1	1	0
J2	0	1	0	1	1	1

FIGURE 5 – 6 parties d'échec

Il est surprenant de ne pas trouver dans les illustrations de problèmes sur le scrutin de ballotage commençant ainsi

> *On suppose que deux candidats A et B soient soumis à un scrutin de ballotage. Le nombre de votant est μ. Chaque bulletin nul ou blanc compte une voix pour chaque candidat, etc.*

La formule (1) peut se reformuler en

$$T\tau(x,y) = Q\tau(x,y) - Q\tau(x+1,y-1) \tag{6}$$

et ce que dit la propriété 2, c'est qu'elle est vraie quelque soit la loi de formation, soit

$$T(x,y) = Q(x,y) - Q(x+1,y-1) \tag{7}$$

On obtient la propriété générale, en considérant les échiquiers de taille arbitraire, donc potentiellement infinie

problème 10 *L'échiquier arithmétique triangulaire s'obtient en superposant sur l'échiquier arithmétique carré de même loi sa copie négative en faisant coïncider sa ligne diagonale d'équation $m = n-1$ celle d'équation $m = n+1$ du carré original.*

Tables 4 et 5 montrent les constructions des triangles arithmétiques respectivement pour la tour et la reine.

Il est très facile d'obtenir une formule close pour les valeurs du triangle arithmétique de la Tour et ainsi répondre au problème 7.

$$Q\tau(n,m) = \frac{n-m+1}{n+1}\binom{n+m}{n} \qquad Q\tau(n,n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{8}$$

	0	1	2	3	4
0	1	1 -1	1 -2	1 -3	1 -4
1	1	2 -1	3 -3	4 -6	5 -15
2	1	3 -1	6 -3	10 -6	15 -10
3	1	4 -1	10 -5	20 -15	35 -35
4	1	5 -1	15 -6	35 -21	70 -56

	0	1	2	3	4
0	**1**				
1	1	**1**			
2	1	2	**2**		
3	1	3	5	**5**	
4	1	4	9	14	**14**

TABLE 4 – Calcul de l'échiquier triangulaire pour la tour $T\tau(n,m) = Q\tau(n,m) - Q\tau(n+1,m-1)$

	0	1	2	3	4
0	1	1 -1	1 -3	1 -5	1 -7
1	1	3 -1	5 -5	7 -13	9 -25
2	1	5 -1	13 -7	25 -25	41 -63
3	1	7 -1	25 -9	63 -41	129 -129
4	1	9 -1	41 -11	129 -61	321 -231

	0	1	2	3	4
0	**1**				
1	1	**2**			
2	1	4	**6**		
3	1	6	16	**22**	
4	1	8	30	68	**90**

TABLE 5 – Calcul de l'échiquier triangulaire pour la reine $T\rho(n,m) = Q\rho(n,m) - Q\rho(n+1,m-1)$

Il y a donc $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ manières de disposer $2n$ nombres sur 2 rangées égales de telle sorte que les nombres soient en ordre croissant de gauche à droite et de haut en bas.

La forme de l'échiquier à employer devant être appropriée à la nature du problème posé, Delannoy étudie alors les deux autres formes qui permettent d'appliquer la propriété 2. Il s'agit des échiquiers pentagonaux et hexagonaux. Pour calculer les valeurs des échiquiers pentagonaux, il suffit de faire glisser l'échiquier carré négatif de (+k,-k) où k représente le nombre ce cellules de la première ligne occupées, $k = 1$ correspondant au cas triangulaire. La table 6 montre le cas $k = 3$. La formule générale de calcul est

$$P(n,m) = Q(n,m) - Q(n+k, m-k) \tag{9}$$

Les échiquiers pentagonaux généralisent l'échiquier triangulaire en

	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1 -1	1 -7
1	1	3	5	7 -1	9 -9
2	1	5	13	25 -1	41 -11
3	1	7	25	63 -1	129 -13
4	1	9	41	129 -1	321 -15

	0	1	2	3	4
0	**1**	1	1		
1	1	**3**	5	6	
2	1	5	**13**	24	30
3	1	7	25	**62**	116
4	1	9	41	128	**306**

TABLE 6 – Calcul de l'échiquier pentagonal pour la reine $P\rho(n,m) = Q\rho(n,m) - Q\rho(n+3, m-3)$

permettant de contraindre l'excédent à une valeur quelconque. Cet échiquier permet donc de résoudre le probème célèbre de l*a ruine du joueur* ou *durée du jeu*, traité par Huyghens, Moivre, Laplace, Lagrange, Ampère et Bertrand [47]

problème 11 *Un joueur expose à un jeu de hasard la nième partie de sa fortune et renouvelle cette épreuve indéfiniement. Quelle est la probabilité pour qu'il se ruine et que la* $(2\mu + n)^{ème}$ *partie jouée lui enlève son dernier écu.*

47. Voir communication dans cet ouvrage de Catherine Goldstein.

	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	
1	1	2	3	4	4
2	1	3	6	10	14
3		3	9	19	33
4			9	28	61

	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	
1	1	3	5	7	8
2	1	5	13	25	40
3		6	24	62	127
4			30	116	305

Table 7 – exemples d'échiquiers arithmétiques hexagonaux pour la tour et pour la reine.

Avec l'échiquier hexagonal, il est possible de contrôler une différence entre n et m, les cas favorables correspondant aux chemins entre les deux diagonales desisnnées par l'hexagone. Les formules de calcul sont beaucoup plus complexes, car il faut faire plusieurs compensations entre la partie inférieure et la partie supérieure, comme les formules calculant le cardinal de l'union d'un nombre quelconque d'ensembles. Cela explique que Catalan ait trouvé un peu sommaire l'explication de [48] et justifie une nouvelle communication sur le sujet [49].

$$\begin{aligned} H(n,m) = \sum_{h=0} \Big[& Q(n-h(a+b), m+h(a+b)) \\ & - Q(n+h(a+b)+b, m-h(a+b)-b) \\ & - Q(n-h(a+b)-a, m+h(a+b)+a) \\ & + Q(n+(h+1)(a+b), m-(h+1)(a+b)) \Big] \end{aligned} \tag{10}$$

Les indices négatifs correspondent à une cellule de valeur nulle. Soit

$$\begin{aligned} H(n,m) = \Big[\sum_{0\leq h} & \binom{n+m}{n-h(a+b)} - \binom{n+m}{m-h(a+b)-b} \\ & - \binom{n+m}{n-k(a+b)-a} + \binom{n+n}{m-(h+1)(a+b)} \Big] \end{aligned} \tag{11}$$

48. Delannoy, « Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilité. »

49. *Idem*, « Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilité. »

Delannoy [50] résout ainsi un problème posé par Rouché [51]

problème 12 *Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun n francs avant d'entrée au jeu ; à chaque partie le perdant donne un franc au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité P pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie de rang assigné ?*

Il faut alors que la différence des pertes et des gains ne dépassent pas $n-1$, c'est-à-dire que les chemins favorables de la tour se situent entre les deux diagonales symétriques (table 8) .

1	1	1	1				
1	2	3	4	4			
1	3	6	10	14	14		
1	4	10	20	34	48	48	
	4	14	34	68	116	164	164
		14	48	116	232	396	560
			48	164	396	792	1352
				164	560	1352	2704

TABLE 8 – échiquier arithmétique hexagonal symétrique pour n=4

Les déplacements de pièces sur des échiquiers sont remplacés maintenant par des réseaux et des treillis. L'étude du mouvement brownien a conduit à généraliser les parcours avec pas quelconques. ([52]). Figure 6, en restreignant les pas à (1,1), (1,-1), nous obtenons les parcours de la tour, à (1,1), (1,-1) et (1,0) celui de la reine, les chemins de type (2) et (4) correspondent aux éléments diagonaux, les échiquiers triangulaires ou prentagonaux ou hexagonaux concernent les types (3) et (4).

50. Henri DELANNOY, « Sur la durée du jeu. », *Bul. de la S.M.F.* 16 (1888), p. 124–128.
51. Eugène ROUCHÉ, « Sur la durée du jeu. », *C.R.A.S.* 23 janvier (1888), p. 253–256.
52. Jean BERTOIN et Jim PITMAN, « Path transformations connecting Brownian bridge, excursion and meander. », *Bulletin des Sciences Mathématiques* 118(2) (1994), p. 147–168.

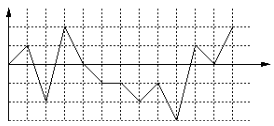
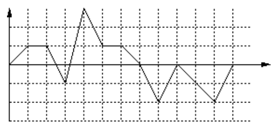
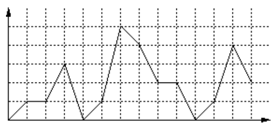
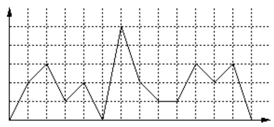
chemins d'une particule en fonction du temps	de (0,0) à (t,n) pas de contrainte de terminaison	de (0,0) à (t,0) contrainte de terminaison
sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ pas de contrainte de parcours	 (1)	 (2)
sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contrainte $n \geq 0$	 (3)	 (4)

FIGURE 6 – 4 types de chemins browniens

En théorie des langages formels, dès 1965, Ginsburg et Spanier[53] introduisent l'opération de *shuffle*[54], noté $\sqcup\!\sqcup$ sur les mots pour représenter le parallèlisme dans un contexte séquentiel. Par exemple on a $ab \sqcup\!\sqcup ac = \{aabc, aacb, abac, acab\}$. En 1998, Mateescu, Rozenberg et Salomaa[55] constatent que shuffle de deux mots posède une interprétation géométrique naturelle, que nous voyons être celle de chemins de la Tour sur un échiquier carré, appelés là *trajectoires*. Il s'agit d'étiqueter un parcours de la tour comme dans le problème des deux files de soldats (Figure 4), la kième $\downarrow$ avec la kième lettre du premier mot et la pième $\rightarrow$ avec la pième lettre du second mot, le chemin comprenant la longueur du premier mot de pas $\downarrow$ et la longueur du second mot de pas $\rightarrow$. Toute trajectoire de bonne longueur représente un mot du shuffle, mais dès que les mots possèdent des lettres communes, plusieurs trajectoires

53. Seymour GINSBURG et H. E. SPANIER, « Mappings of languages by two-tape devices. », *J. Assoc. Computing Machinery* 12 (1965), p. 423–434.

54. C'est aussi le terme consacré en français chez les joueurs de cartes : on prend deux jeux de cartes, et l'on en fait un seul en fusionnant les deux paquets en respectant l'ordre initial de chacun d'entre eux. Le shuffle de deux mots est formé des mots obtenus en insérant dans l'un des mots, les lettres du second en respectant l'ordre dans lequel elles figurent.

55. Alexandru MATEESCU, Grzegorz ROZENBERG et Arto SALOMAA, « Shuffle on trajectories : Syntactic Constraints. », *Theorical Computer Science* 197 (1998), p. 1–56.

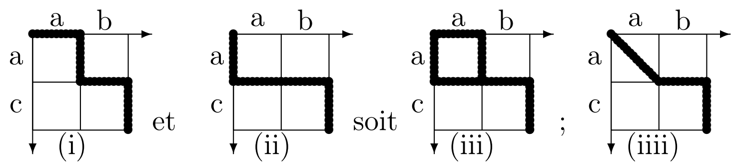


FIGURE 7 – les deux trajectoires de $aabc \in ab \sqcup\!\sqcup ac$

peuvent représentent un même élément du shuffle. Par exemple, il y a deux trajectoires représentant $aabc \in ab \sqcup\!\sqcup ac$ comme l'indique Figure 7 (i) et (ii) et (iii). Nous avons représenté en (iiii) ce que les biologistes appellent l'alignement de séquences, qui est un outil de base pour la comparaison des séquences de génomes, Dans ce domaine, le calcul exact du nombre d'alignements a conduit aux formules (3) et (5)[56].

Généraliser les chemins de treillis à des espaces de dimension quelconques se fait très facilement, il suffit par exemple pour la tour de suivre les directions données par les axes – soit les vecteurs dont la somme des coordonnées est exactement 1– et pour la reine de s'autoriser tous les pas correspondant à un vecteur dont les coordonnées valent soit 0 soit 1. L'étude de ces derniers a commencé dans les années 1990[57], invoquant le lien avec l'énumération des ordres partiels et leur utilité en informatique, en particulier pour déterminer la complexité des algorithmes de tri et en sciences sociales, notamment pour l'étude des ordres préférentiels. Nous[58] avons mis en évidence les liens naturels qui existent entre les chemins de Delannoy généralisés et les réseaux de Petri et le raisonnement temporel en intelligence artificielle. D'autre part, ces chemins ont été étudié en soi[59].

Nous allons conclure cette communication en montrant que la

56. Angela TORRES-IGLESIAS, Alberto CABADA et Juan NIETO, « An Exact Formula for the Number of Alignments Between Two DNA Sequences », *DNA Sequence.* 14 (6) (2003), p. 427–430.

57. Shashidhar KAPARTHI et Raghav RAO, « Higher dimensional restricted lattice paths with diagonal steps », *Discrete Applied Mathematics* 31 (1991), p. 279–289.

58. Sylviane SCHWER, « S-arrangements avec répétitions », *C.R.A.S. de Paris* Série I, 334 (2002), p. 261–266.

59. Voir la communication de Jean-Michel Autebert dans cet ouvrage.

théorie des temps verbaux du grammairien Marc Wilmet [60] se modélise tout naturellement avec des chemins de Delannoy propre à la reine.

Comme le rappelle Benveniste [61], les langues ne nous offrent que des constructions culturelles et cultuelles – donc variées – du réel. Ainsi, il faut distinguer plusieurs types de temps.

— le temps physique, newtonien, continuum, infini, lineáire et uniforme,
— le temps chronique, celui de l'ordre des événements, celui qui a un sens pour nous et que nous objectivons par des artifacs comme les horloges et les calendriers.
— le temps linguistique lié organiquement à l'exercice de la parole (ou de l'écriture), c'est-à-dire centré autour d'un moment en perpétuel mouvement, appelé moment présent, dénonciation, d'actualité (ν).

Concernant les événements, l'on peut présenter l'extention temporelle d'un événement sous différents aspects : ponctuel comme dans *Hier, il téléphona à sa mère pendant 3 heures.* et *Pendant qu'il téléphonait à sa mère, on sonna à la porte.*. La forme *téléphona* présenté l'événement comme une unité atomique, indécomposable, la forme *téléphonait* la présente comme extensive, donc divisible. Ainsi les temps verbaux ne font pas que donner des informations temporelles (et de mode, personne et nombre) mais indique également - ce qui est essentiellement fait de langue - une manière de présenter l'événement. Ces informations propres à la langue sont appelées *aspectuelles.* Appelons E le moment de l'événement, indépendamment de toute durée.

Il n'y a à proprement parler que trois temps linguistiques, le présent (présence de$E$ à ν), passé (antériorité de E sur ν) et futur (postériorité de E sur ν).

La plupart des théories des temps verbaux du français, depuis la grammaire de ces messieurs de Port-Royal (1660) [62], reposent

60. Marc Wilmet, *Grammaire critique du français.* Bruxelles : de boeck, 2003 ; Marc Wilmet, *Grammaire rénovée du français.* Bruxelles : de boeck, 2007.

61. Emile Benveniste, *Problèmes de linguistique générale 2.* Paris : Gallimard, 1969, p. 69-78.

62. Marc Arnauld et Claude Lancelot, *Grammaire générale et raisonnée.* Paris [1660] : Paulet, 1969.

sur le fait que la fonction principale d'un temps verbal (ou tiroir temporel) est de fournir des instructions pour positionner l'un par rapport à l'autre divers repères sur l'axe du temps, parmi lesquels E et ν. La théorie des temps verbaux de Marc Wilmet traduit la syntaxe des temps verbaux du français contemporain en séparant les axes du temps en deux axes, l'un pour ce qui concerne l'énonciation, l'autre, placé en dessous, pour ce qui concerne l'événement lui-même. Nous allons nous concentrer sur les deux modes de l'indicatifs et du conditionnel, qui sont considérés maintenant comme un même mode par la plupart des linguistes.

Sur l'axe de l'énonciation, sont placés 2 repères : ν – renommé A pour actualité – et un second repère, appelé l'actualité dépassée et nommée A', antérieur au premier, permettant de dégager deux sous-systèmes verbaux : celui de l'actualité, porté par le présent - qui n'utilise que A, et celui qui situe les repères de l'événements par rapport à A', lui-même situé par rapport à A. Il concerne toutes les désinences *ait* de la $3ème$ personne du singulier, soit les temps de l'imparfait et du conditionnel. Sur l'axe événementiel, l'événement est représenté par autant de repères que le temps utilise de termes un seul repère pour les temps simples, un second repère placé à sa gauche – comme l'auxillaire par rapport au radical du verbe- pour les temps composés et un troisième repère placé à gauche pour les temps surcomposés.

Figure 8 nous avons repésenté pour chaque temps verbal les repères énonciatifs utiles par des cercles gris, les repères événementiels utilsés par des cercles noirs. Sur chaque axe les relations de précédence immédiate sont représentés par des segments entre les cercles adéquats. La relation temporelle entre actualité (dépassée ou non) et l'événement correspond au segment vertical ou oblique entre les deux axes. Les tableaux de Delannoy avec les parcours correspondant sont représentés en-dessous. On constate qu'un chemin est absent dans chaque échiquier du second sous-système. Il s'agit d'un temps qui décrirait un événement strictement antérieur à l'actualité dépassé, auquel cas les relations entre l'événement et A d'une part, et A' d'autre part, sont indiscernables, et donc d'après les règles pragmatiques de conversation qui disent qu'un locuteur doit donner autant mais pas plus d'informations que nécessaire [63],

63. H. P. Grice, « Logic and conversation », *Syntax and Semantics* 3 (1975),

il n'y a pas lieu de discerner entre A et A'. Sur la Figure 8,on voit que les chemins correspondant aux temps des colonnes passé et futur II se construisent en ajoutant une rangée de plus pour les échiquiers et en terminant les chemins du N-E au S-O des temps des colonnes passé et futur l. Cette théorie justifie bien de fusionner les modes conditionnel et indicatifs. Il est également facile de constater que les «temps absents» sont les miroirs des temps de la colonne du passé simple.

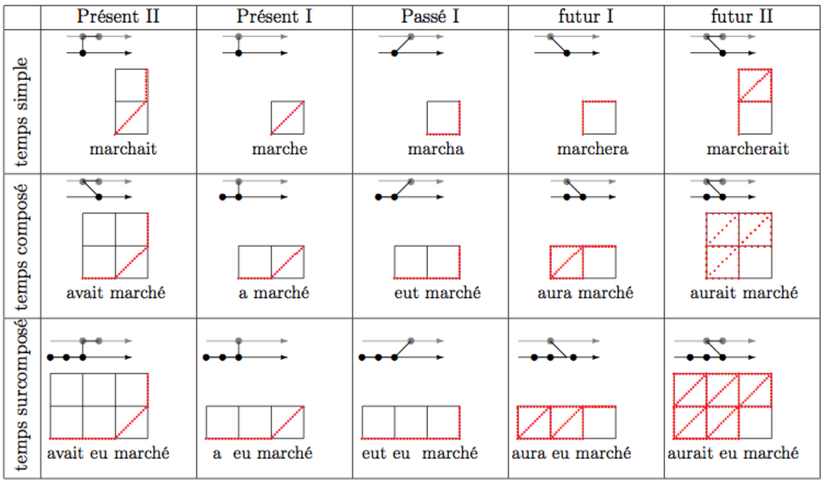


FIGURE 8 – Théorie des Temps verbaux de Marc Wilmet et Echiquiers Arithmétiques de Delannoy

p. 41–58; H. P. GRICE, « Further notes on logic and conversation », *Syntax and Semantics* 9 (1978), p. 113–127.